Le programme « frac_decomp » : décomposition d'une fraction rationnelle, d'un système linéaire, en éléments simples sur le corps des réels.

1 Introduction

Cette fonction peut remplacer la macro Scilab `pfss.sci`. La méthode proposée (algébrique) n'est pas la même que la méthode utilisée par Scilab. On utilise ici le programme `mroots.sci` qui donne, pour un polynôme réel, les racines et les multiplicités correspondantes. On commence par rechercher les polynômes élémentaires, du premier et second degré et les multiplicités correspondantes. En fonction de ces polynômes et des multiplicités, on calcule en résolvant un système d'équations linéaires, le résidu relatif à chacune des racines, le reste du programme consiste en une présentation sous forme de vecteur, les éléments simples (on donne aussi le polynôme quotient des deux polynômes numérateur et dénominateur si le degré du numérateur $>=$ au degré du dénominateur). La syntaxe de cette fonction est : `[resultat] = frac_decomp(g,flag)`

1.1 Principe de l'algorithme

On forme, à priori, l'expression de la décomposition en effectuant la division euclidienne du numérateur Num par le dénominateur Den de la fraction de départ r soit `[rest,elm1] = pdiv(Num,Den)`. Le polynôme `elm1` est un polynôme de degré : `degré(Num)-degré(Den)`, si degré(Num) $>=$ degré(Den) . Ceci réalisé, on met la fraction `rest` en éléments simples : `G = Num/Den - elm1` . Pour faire cette décomposition on calcule les racines et les multiplicitées des racines de Den avec le programme `mroots.sci` : ce programme est **obligatoire**. C'est avec ce programme que l'on caractérise les racines en deux catégories : les racines réelles et les racines imaginaires en tenant compte des multiplicités, on peut ainsi déterminer les éléments simples et construire une matrice de polynômes A. En identifiant les degrés des deux membres des équations polynômiales on résoud un système d'équations linéaires dont la solution donne les valeurs des coefficients de la décomposition : $C = (A^t)^{-1}COE$, Le vecteur COE étant les coefficients du numérateur de G. Voici un exemple simple :

```
--> r=(x^9+2*x)/((x+6)*(x+1)^3*(x^2+x+7)*(x^2+x+1)^2)
r =
                                          2x +x⁹
-----------------------------------------------------------------
42 +223x +576x² +948x³ +1079x⁴ +876x⁵ +510x⁶ +209x⁷ +60x⁸ +12x⁹ +x¹⁰
```

```
   --> Num = r.num ; Den=r.den ;
   --> rm=mroots(Den)
rm =
          -6.  + 0.i            1.  + 0.i //Racine réelle simple
          -1.  + 0.i            3.  + 0.i //Racine réelle triple
          -0.5 + 2.5980762i    1.  + 0.i //Racine imaginaire simple
          -0.5 - 2.5980762i    1.  + 0.i //Racine imaginaire conjuguée
simple
          -0.5 + 0.8660254i    2.  + 0.i //Racine imaginaire double
          -0.5 - 0.8660254i    2.  + 0.i //Racine imaginaire conjuguée
double
```

On construit les polynômes élémentaires de premier et second ordre dans l'ordre d'apparition des racines soit :

1.1.1 La partie entière, si nécessaire

On réalise, après avoir rendu le polynôme Den unitaire si c'est utile, la division euclidienne de Num par Den :

```
   --> [rest, elm1] = pdiv(Num,Den]; G = rest/Den ;
```

On utilisera en fin de programme les deux résultats trouvés.

1.1.2 Les racines réelles

```
--> polr //Pour les polynômes réels élémentaires.
   polr =
   6 +x          //racine simple
   1 +x          //racine triple
   1 +2x +x²     //(1+x)^2
   1 +3x +3x² +x³//(1+x)^3
```

Pour une racine réelle simple on aura un seul élément de la la forme : $c_1\frac{1}{6+x}$. Puis pour la racine triple on a les éléments : $c_2\frac{1}{1+x}$ puis $c_3\frac{1}{(1+x)^2}$ et enfin $c_4\frac{1}{(1+x)^3}$.(Les c_i sont des constantes à déterminer).

1.1.3 Les racines imaginaires (conjuguées)

On construit enfin les trinômes avec les racines imaginaires conjuguées puis les polynômes élémentaires correspondants voici un exemple avec deux trinômes , l'un $(2+2s+s^2\ )$ est simple et $(2+s+s^2\ )$ a une multiplicité 2.

```
   --> s=%s; g=syslin("c",(3+s)/(s*(2+2*s+s*s)*(2+s+s*s)**2))
   --> decomp=frac_decomp(g);
decomp =
0 0.375  -1.125   -0.125s         -1.25                0.25s           0.5     -0.25s
- ----- --------- --------- ------------------- ------------------- --------- ---------
1   s   2+1s+s²   2+1s+s²   4 +4s +5s²+2s³+s⁴   4 +4s+5s²+2s³+s⁴   2+2s+s²   2+2s+s²
```

On voit bien apparaître les deux trinômes, le simple avec les deux fractions $\frac{0.5}{2+2s+s^2}$ et $\frac{-0.25s}{2+2s+s^2}$ puis le trinôme de multiplicité 2 avec quatre fractions $\frac{-1.125}{2+s+s^2}$ et $\frac{-0.125}{2+s+s^2}$ puis $\frac{-1.25s}{(2+s+s^2)^2}$ et $\frac{0.25s}{(2+s+s^2)^2}$. En pratique on recombine deux fractions pour donner au numérateur un polynôme de degré 1 : drapeau `flag="y..."` dans le programme.

Une petite vérification :

```
--> clean(sum(decomp),0,1.e-14)
ans =
3 +1s
----------------------------------
8s +16s² +22s³ +18s⁴ +11s⁵ +4s⁶ +s⁷
```

Utilisons maintenant le programme Scilab `pfss.sci`, et comparons les résultats.

```
   --> elts=pfss(r,1.e+15)
elts =
   (1) :  [1x1 rational] of s
(2) :  [1x1 rational] of s
(3) :  [1x1 rational] of s
(4) :  [1x1 rational] of s
   -->velts = list2vec(elts)'
   0 -0.1117919 -0.1055645s 0.0867818 -0.0160205s 0.1577441
   - --------------------- -------------------- ------------
   1    2 +1.0000001s +s²          2 +2s +s²      3.048D-16 +s

--> sum(velts)//??????
```

1.1.4 Construction du système linéaire à inverser

Une fois mis de coté la partie entière du rapport des deux polynômes Num/Den, on regroupe les éléments simples en deux sous ensembles :

1. Les éléments simples correspondants aux pôles réels simples ou multiples du dénominateur.
2. Les éléments simples correspondants aux pôles imaginaires conjugués simples ou multiples du dénominateur.

En effet on peut écrire la relation $\frac{Num}{Den} = Partieentière + \sum élemsréels + \sum élemsimag$.
Soit $rest = Den(\sum élemsréels) + Den(\sum élemsimag)$.

La partie droite de cette équation peut ce mettre sous la forme :

$$(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_i, \cdots) * (Den/(x + a_1), Den/(x + a_2)^2 \ldots) \cdots (Den + x * Den)/(x^2 + b_i x + d_j)^k)^t$$

Ce système d'équations polynômiales est linéaire vis à vis des paramètres c_j, on peut donc inverser la matrices des coefficients des polynômes et tenir compte de la partie gauche de l'équation qui est aussi un vecteur déterminable COE.